



TITLE:

# カオス・ニューロンを用いた離散時間自己想起形連想記憶モデルの解析 (力学系の不変量とその応用)

AUTHOR(S):

吉永, 哲哉; 川上, 博

---

CITATION:

吉永, 哲哉 ...[et al]. カオス・ニューロンを用いた離散時間自己想起形連想記憶モデルの解析 (力学系の不変量とその応用). 数理解析研究所講究録 1998, 1072: 144-161

ISSUE DATE:

1998-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62577>

RIGHT:

# カオス・ニューロンを用いた離散時間 自己想起形連想記憶モデルの解析

吉永 哲哉, 川上 博

Tetsuya Yoshinaga & Hiroshi Kawakami

徳島大学工学部電気電子工学科

## 1 はじめに

脳における記憶のメカニズムを表す簡単なモデルの 1 つとして, 相関形連想記憶モデルがある. このモデルは, 低次元 (1 ないし 2 次元) 離散力学系を単位ニューロンと考え, この低次元系を複数個接続して次元の大きな力学系を構成し, 記憶パターンに対応した安定固定点を意図的につくり出すように工夫された力学系である. うまく設計された系では, アトラクタは記憶したいパターンに対応した安定固定点のみであり, 状態空間はこれらのアトラクタの引力圏 (basin) によって分割されている. したがって, 任意の初期状態から出発した運動は, この軌道が属する引力圏内にあるアトラクタへと収束していく. アトラクタが記憶パターンに対応し, 引力圏内の状態がこの記憶を呼び出す (連想させる) 初期値に対応している.

このモデルでは, 1 つの記憶パターンが呼び出されると, 状態は対応するアトラクタに留まるので, 別の記憶パターンを呼び出したいときには系に入力などの摂動を加える必要がある. また, アトラクタとしては安定固定点でなくとも他のアトラクタと区別できる安定な不変集合であればよい. したがってアトラクタとしては, たとえば安定固定点が周期倍分岐してできた適切なサイズのカオス状態でもよい.

さて, この力学系のアトラクタをカオス的なものとし, 更に系の設計をうまくしてアトラクタが引力圏の境界を僅かに突き破る程度の系を得たとしよう. この系では, 孤立していた個々の記憶パターンに対応したアトラクタが相互にゆるく繋がり, 大きなカオス・アトラクタが構成されて, 運動は記憶パターン間をカオス的に遍歴するようになるであろう.

実際, 合原 [1] は彼が提案したカオス・ニューロン (2 次元離散力学系) を 100 個接続した神経回路網を構成してこのような現象を観察している [2, 3]. また, 徳田・長島 [4] 等は, 16 個のニューロンを接続した回路の分岐現象の解析を試みている. 我々は更に個数を 4 個にまで減らして現象を力学的に明らかにしようと解析を進めてきた [5, 6]. 小室 [7] は, この集会において同様な努力を 8 個の場合について行った結果を報告している.

以下, 次節において神経回路網モデルの導出し,  $N = 2^n$  個のカオス・ニューロンを用いた神経回路網に  $m$  個の記憶パターンを埋め込んだ系は,  $m$  個の低次元非線形系に還元で

きることを示す。すなわち、記憶パターン埋め込み行列の構成法から生じる神経回路網の対称性をうまく利用すれば、系の運動を低次元化して考察できることを示す。そのあと 4 個の場合の数値解析例を述べる。これらを通して、この系にみられる「カオス遍歴」は上述のいわゆる「アトラクタの boundary crisis」であることを例示したい。

## 2 問題の記述

ここでは、 $N = 2^n$  個のカオス・ニューロンを用いた自己想起形離散時間モデルを考える。そのため、基本単位となる低次元力学系としてのニューロン、それらを接続した神経回路網 (neural network)、記憶パターン、記憶パターンを埋め込むための接続行列の構成法などについて簡単に紹介する。

### 2.1 ニューロン

基本単位となるニューロンは、1 ないし 2 次元の離散力学系で与えられる。この力学系は、興奮状態と非興奮状態と呼ばれる 2 つのアトラクタを持つように設計されている。

最も簡単な例として 1 次元の力学系を対応させると、たとえば次のような離散時間系 (差分方程式) を考えるとよいであろう。

$$\begin{aligned}\eta(t+1) &= k_f \eta(t) + \sum_j w_j u_j(t) \\ x(t) &= f(\eta(t))\end{aligned}\tag{1}$$

ここに、 $t$  は離散時刻  $t \in \mathbb{Z}$  を表し、 $\eta, u_j \in \mathbb{R}$  と  $x \in \mathbb{R}$  は、それぞれ、このニューロンの内部状態、他のニューロンからの入力、およびこのニューロンの出力を表している。また、 $w_j \in \mathbb{R}$  は入力の結合係数である。

式 (1) の第 1 式が系の内部状態の進展を表す状態方程式、第 2 式が出力特性を表す出力方程式となっている。この出力は他のニューロンの入力  $u$  となって回路を構成することとなる。出力方程式に含まれる非線形特性は飽和形非線形特性であり、通常シグモイド関数と呼ばれている。たとえば、興奮状態を 1 近傍の値に、非興奮状態を  $-1$  近傍の値に対応させる場合には

$$\begin{aligned}f(y) &= \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(\alpha y) \\ f(y) &= \tanh(\alpha y)\end{aligned}\tag{2}$$

などの関数を使えばよい。

他方、合原等 [1] によって提案されたカオス・ニューロンは、状態が 2 次元の離散系である。その状態方程式は

$$\begin{aligned}\eta(t+1) &= k_f \eta(t) + \sum_j w_j u_j(t) \\ \zeta(t+1) &= k_r \zeta(t) - \alpha x(t) + a\end{aligned}\tag{3}$$

で与えられる。ここに、

$$x(t) = f(\eta(t) + \zeta(t))\tag{4}$$

はこのニューロンの出力であり、その非線形特性は次式で定義される。

$$f(y) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{y}{\epsilon}}} \quad (5)$$

このニューロンでは、パラメータ  $\epsilon$  を適当に小さく選んで、興奮状態が 1 近傍の値に、また非興奮状態が 0 近傍の値に設定されている。

## 2.2 神経回路網

さて、 $N = 2^n$  個のニューロンを用いた自己想起形離散時間モデルを構成しよう。これには  $N$  個のニューロンを用意して、それらの出力を適当に自分あるいは他のニューロンの入力に接続すればよい。したがって、先に述べた 1 次元ニューロンでは次の回路が得られる。

$$\eta_i(t+1) = k_f \eta_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} f(\eta_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N = 2^n \quad (6)$$

あるいは、ベクトル方程式として次式で表される。

$$\boldsymbol{\eta}(t+1) = k_f \boldsymbol{\eta}(t) + W \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}(t)) \quad (7)$$

ここに、 $W = (w_{ij})$  および

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_N]^T, \quad \mathbf{f} = [f(\eta_1), \dots, f(\eta_N)]^T$$

を表し、 $( )^T$  は転置を表す。

また、合原ニューロンでは同様に次式の回路方程式となる。

$$\begin{aligned} \eta_i(t+1) &= k_f \eta_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} f(\eta_j(t) + \zeta_j(t)) \\ \zeta_i(t+1) &= k_r \zeta_i(t) - \alpha f(\eta_i(t) + \zeta_i(t)) + a \\ i &= 1, 2, \dots, N = 2^n \end{aligned} \quad (8)$$

あるいは、等価的にベクトル方程式で次式となる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t+1) &= k_f \boldsymbol{\eta}(t) + W \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)) \\ \boldsymbol{\zeta}(t+1) &= k_r \boldsymbol{\zeta}(t) - \alpha \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)) + \mathbf{a} \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、

$$\mathbf{a} = [a, \dots, a]^T$$

を表す。

さて、問題はニューロン間の結合を表す行列  $W = (w_{ij})$  をいかに定めるかということである。これは、この回路に埋め込みたい記憶パターンとそのパタンの個数によって定められる。次にこれを検討しよう。

### 2.3 記憶パターン

すこし唐突ではあるが、記憶パタンの基本ベクトルを、次のようにして作った  $N$  個の  $N$  次元ベクトルで与えよう。

まず、2つの状態  $(\eta_1, \eta_2)$  の互換がつくる群  $C_2$  の2次元表現を

$$C_2 = \{g_1, g_2\} \quad (10)$$

とする。ここに、

$$g_1 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

とおいた。また、 $C_2$  の既約指標を  $2 \times 2$  の行列に表示して

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

とする。

次に、この指標表  $H_2$  の  $n$  個の直積を考える。その表現行列は行列 (12) から  $n$  個の Kronecker 積をとって求めることができる。たとえば、

$$H_4 = H_2 \otimes H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad n = 2 \quad (13)$$

$$H_8 = H_2 \otimes H_2 \otimes H_2 = H_4 \otimes H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad n = 3 \quad (14)$$

.....

$$H_{2^n} = \begin{bmatrix} H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}} \\ H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}} \end{bmatrix}, \quad n = n \quad (15)$$

などとなる。 $H_{2^n}$  は Hadamard 行列と呼ばれている。

そこで、この行列の  $N$  本の列ベクトルを個別に取り出して、これを記憶の基本パターンと定義する<sup>1</sup>。したがって、この力学系では、最大  $N$  個の基本パターンが定義できる<sup>2</sup>。各パ

<sup>1</sup>行列  $H_k$  は対称行列なので、行ベクトルを抜き出して基本パターンと考えてもよい。ここでは、列ベクトルで定義した。

<sup>2</sup>行列  $H_k$  の第1列は1のみからなるパターンとなり、一様なパターンであるから応用上は意味がない。また、このパターンだけを用いて次節で述べる埋め込み行列  $W$  を構成するとすべてのニューロンが一様に結合した系が得られる。通常は、2列目以下の列ベクトルを記憶パターンとして用いる。

タン・ベクトルは通常のユークリッドノルムで互いに直交している。またパタン・ベクトルは長さを1に正規化しておいた方が便利なのでそのように定義しておこう。行列  $H_{2^k}$  は

$$H_{2^k}^T = H_{2^k}, \quad H_{2^k} \cdot H_{2^k} = 2^k I_{2^k} \quad (16)$$

の性質を持っている。したがって

$$P_{2^k} = P_{2^k}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} H_{2^k} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} H_2 \overbrace{\otimes \cdots \otimes}^k H_2 \quad (17)$$

を定義すると、これは対称な直交行列となる。

【基本パタン・ベクトルの定義】

直交行列  $P_{2^k}$  の  $2^k$  本の列ベクトル：

$$p^1, p^2, \dots, p^{2^k} \quad (18)$$

を記憶の基本パタン・ベクトルと呼ぶ。

たとえば  $N=4$  の場合の4本の基本パタン・ベクトルは次のようになる。

$$p^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad p^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad p^4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

なお、これらの基本パタン・ベクトルは普通、長方形状にベクトルの成分を並び換えて表示し、成分が1の部分に白に、-1の部分に黒に塗って、2次元パタンとして見やすくして議論される。

【基本パタン・ベクトルの反転パタン・ベクトルの定義】

基本パタン・ベクトルの成分を「1を-1に、-1を1に」入れ換えたパタンを反転パタンと呼ぶことにする。すなわち、 $p^k$  を基本パタン・ベクトルとすると、その反転パタン・ベクトルは、 $-p^k$  である。

さて、ここで基本パタン  $p^k$  の符号数(signature)  $\sigma(p^k)$  を定義しておこう。これは、パタンベクトル  $p^k$  の成分を1行目（これは必ず1）から最後の行まで見ていって、符号が変化する数と定義する。たとえば、上の述べた例では

$$\sigma(p^1) = 0, \quad \sigma(p^2) = 3, \quad \sigma(p^3) = 1, \quad \sigma(p^4) = 2 \quad (20)$$

となる。パタンの符号数は、基本パタンの複雑さ（表現するための次元の高さ）を表していると考えられる。すなわち、 $2^k$  次元のパタンベクトルを考えると、

$$\sigma(p^l) < 2^{k-1} \quad (21)$$

の基本パタンベクトルは、次元が  $2^{k-1}$  の基本パタンを単に次元を高くしただけと見なしてよい。たとえば、

$$p^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

となって、この  $p^3$  は 2 次元パタン  $[1, -1]$  の次元を 4 次元としただけと言える。そこで  $2^k$  次元ベクトルで初めて表現できるパタンは

$$2^{k-1} \leq \sigma(p^\ell) \leq 2^k - 1 \quad (23)$$

を満足するパタンベクトルであると言える。

## 2.4 基本パタン・ベクトルの別の記法

次節で定義する記憶パタンの埋め込み行列の性質を見やすくするために、基本パタン・ベクトルの記法を変えて定義しておく。まず、2 次元の基本パタン・ベクトルを

$$p^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

で定義する。次に 4 次元の基本パタン・ベクトルをこれらのテンソル積で定義し、上付き添字を併記する。すなわち

$$\begin{aligned} p^{(1,1)} &= p^{(1)} \otimes p^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & p^{(1,2)} &= p^{(1)} \otimes p^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ p^{(2,1)} &= p^{(2)} \otimes p^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, & p^{(2,2)} &= p^{(2)} \otimes p^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

この操作を帰納的行って、 $2^k$  次元の記憶パタンの基本ベクトル  $p^{(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1})}$  から  $2^{k+1}$  次元の基本ベクトルを次式で定義する。

$$\begin{aligned} p^{(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1})} &= p^{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \otimes p^{(i_{k+1})} \\ &= p^{(i_1)} \otimes p^{(i_2)} \otimes \dots \otimes p^{(i_k)} \otimes p^{(i_{k+1})} \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、上付き添字の  $i_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, k$  は 1 または 2 を表す。

次に、これらのベクトルが座標の互換に対して、符号の反転性を除いて不変となることを見ておこう。そのためにまず式 (10) で定義した互換を改めて

$$G_2 = \{g^{(1)}, g^{(2)}\} \quad (27)$$

ここに、

$$g^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と書き、この群の  $k$  個の直積群を

$$\begin{aligned} G_{2^k} &= G_2 \overbrace{\otimes \dots \otimes}^k G_2 \\ &= \{g^{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \mid i_\ell = 1 \text{ or } 2; \ell = 1, 2, \dots, k\} \end{aligned} \quad (28)$$

と書くことにする．たとえば

$$G_4 = G_2 \otimes G_2 = \{g^{(1,1)}, g^{(1,2)}, g^{(2,1)}, g^{(2,2)}\} \quad (29)$$

ここに

$$\begin{aligned} g^{(1,1)} = g^{(1)} \otimes g^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & g^{(1,2)} = g^{(1)} \otimes g^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{(2,1)} = g^{(2)} \otimes g^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & g^{(2,2)} = g^{(2)} \otimes g^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

である．

【基本パターン・ベクトルの互換に対する不変性】

2次元の基本パターン・ベクトルに互換  $G_2$  を作用させると次式となる．

$$\begin{aligned} g^{(1)}(p^{(1)}) &= p^{(1)}, & g^{(2)}(p^{(1)}) &= p^{(1)}, \\ g^{(1)}(p^{(2)}) &= p^{(2)}, & g^{(2)}(p^{(2)}) &= -p^{(2)} \end{aligned} \quad (31)$$

最後のベクトルが反転するが、この符号を無視すると、基本ベクトルは互換によって不変と言える．このことは、一般に成り立つ．すなわち

$$g^{(j_1, j_2, \dots, j_k)}(p^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}) = (-1)^r p^{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \quad (32)$$

ここに、 $r$  は  $g^{(2)}(p^{(2)})$  の出現する個数を表す．

【証明】実際に計算すると得られる．

## 2.5 記憶パタンの埋め込み行列 $W$ の定義

いま、神経回路網に  $m$  個の記憶パターン  $p^{k_1}, p^{k_2}, \dots, p^{k_m}$  を記憶させるために接続行列  $W$  を以下のように構成しよう．ここに、 $k_1, \dots, k_m$  は、基本パターン・ベクトルから取ってきた  $m$  個のベクトルであることを表す．

まず、基本パターン・ベクトルから  $N$  個の行列  $W_k$  を作っておく．

$$W_k = (w_{ij}) = p^k \cdot (p^k)^T, \quad k = 1, \dots, N \quad (33)$$

この行列は、状態空間  $R^N$  の線形写像と考えると、それぞれのパタンの張る 1 次元部分空間への射影となっている．実際、

$$V_k = \{ap^k \in R^N \mid a \in R\} \quad (34)$$

とおくと、



- 任意のベクトル  $x \in R^N$  に対して,  $W_k x \in V_k$
- $W_k \cdot W_k = W_k$

となっている.

そこで, 回路の接続行列  $W$  を次のように定義する.

【接続行列  $W$  の定義】

いま, 埋め込みたい  $m$  個の記憶パターン  $p^{k_1}, p^{k_2}, \dots, p^{k_m}$  に対応して, 上で作った  $m$  個の射影  $W_{k_1}, W_{k_2}, \dots, W_{k_m}$  を単に線形結合した行列を作り, これを  $W$  と定義する. すなわち,

$$W = \sum_{l=1}^m W_{k_l} \quad (35)$$

たとえば,  $N = 4$  の場合の例を考えると, パタン・ベクトル (19) より,  $p^2$  のみを埋め込んだ場合の接続行列は

$$W = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

となる. 同様に  $p^2$  と  $p^3$  を埋め込んだ場合は

$$W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

となる.

なお,  $W$  の構成法は次のようにもう少し一般化して考えることもできる. 上で定義した  $N$  個の射影  $W_k$  を基底とするベクトル空間を考え,  $W$  をこの空間の点であると定義する. このときは

$$W = \sum_{k=1}^N \beta_k W_k, \quad \beta_k \in R \quad (38)$$

となって, 各基本パターン  $p^k$  が重み  $\beta_k$  付きで埋め込まれたこととなる. 通常は, 重みを 1 として  $N/2$  個程度までのパターンを埋め込んだ系が考えられている.

## 2.6 記憶パタンの埋め込み行列 $W$ の定義: 別の記法

前節の定義を別の記法で表し, その性質を考えよう.  $N = 2^n$  の場合を考える. まず, 基本パターン・ベクトル  $p^{(i_1, i_2, \dots, i_n)}$  から  $N$  個の基本接続行列  $W^{(i_1, i_2, \dots, i_n)}$  を作る.

$$W^{(i_1, \dots, i_n)} = p^{(i_1, \dots, i_n)} \left( p^{(i_1, \dots, i_n)} \right)^T \quad (39)$$

ここに,  $i_l, l = 1, 2, \dots, n$  は 1 または 2 を表す.

【基本接続行列  $W^{(i_1, \dots, i_n)}$  の性質】

基本接続行列は、 $n$  個の互換が作る直積群 (28)  $G_{2^n}$  の変換に関して次の性質を持つ。

$$gW^{(i_1, \dots, i_n)}g^{-1} = W^{(i_1, \dots, i_n)}, \quad \forall g \in G_{2^n} \quad (40)$$

このことから、基本接続行列の線形結合として構成した接続行列  $W$  も同様な性質を持つ。すなわち

$$W = \sum \beta_{(i_1, \dots, i_n)} W^{(i_1, \dots, i_n)} \quad (41)$$

をつくると

$$gWg^{-1} = W, \quad \forall g \in G_{2^n} \quad (42)$$

【基本接続行列  $W^{(i_1, \dots, i_n)}$  の構成法】

基本接続行列  $W^{(i_1, \dots, i_n)}$  は、次のように順次構成できる。まず、2 次元の場合は

$$W^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad W^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

となる。次に 4 次元の場合は次式となる。

$$\begin{aligned} W^{(1,2)} &= W^{(1)} \otimes W^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W^{(2)} & W^{(2)} \\ W^{(2)} & W^{(2)} \end{bmatrix} \\ W^{(2,1)} &= W^{(2)} \otimes W^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W^{(1)} & -W^{(1)} \\ -W^{(1)} & W^{(1)} \end{bmatrix} \\ W^{(2,2)} &= W^{(2)} \otimes W^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W^{(2)} & -W^{(2)} \\ -W^{(2)} & W^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

一般に、 $W^{(i_1, \dots, i_k)}$  から、 $W^{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})}$  をつくるには、

$$W^{(i_1, \dots, i_{k+1})} = W^{(i_{k+1})} \otimes W^{(i_1, \dots, i_k)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} W^{(i_1, \dots, i_k)} & W^{(i_1, \dots, i_k)} \\ W^{(i_1, \dots, i_k)} & W^{(i_1, \dots, i_k)} \end{bmatrix}, & i_{k+1} = 1 \\ \begin{bmatrix} W^{(i_1, \dots, i_k)} & -W^{(i_1, \dots, i_k)} \\ -W^{(i_1, \dots, i_k)} & W^{(i_1, \dots, i_k)} \end{bmatrix}, & i_{k+1} = 2 \end{cases} \quad (45)$$

の計算で、2 倍の基本接続行列を作ればよい。

## 2.7 基本接続行列による回路のグラフ的な性質

基本接続行列  $W^{(i_1, i_2, \dots, i_n)}$  を用いて接続した回路は、グラフとして  $G_{2^n}$  の対称性を持つことをみておこう。

接続の基本行列は前節の式 (45) から分かるように

$$W^{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})} = \begin{bmatrix} W^{(i_1, \dots, i_k)} & W^{(i_1, \dots, i_k)} \\ W^{(i_1, \dots, i_k)} & W^{(i_1, \dots, i_k)} \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} W^{(i_1, \dots, i_k)} & -W^{(i_1, \dots, i_k)} \\ -W^{(i_1, \dots, i_k)} & W^{(i_1, \dots, i_k)} \end{bmatrix}$$

となっている。このことから、回路は次のような特殊な接続となっている。

- 2 つのブロック対角要素は同じで  $W^{(i_1, \dots, i_k)}$  となっている。

- 2つの非対角要素も同じである。これらは符号が反転する場合とそうでない場合の2種類しかない。

そこで、 $2^{k+1}$ 次元の回路は、すべて次の操作から構成されていることが分かる。

- 接続行列が  $W^{(i_1, \dots, i_k)}$  となっている  $2^k$ 次元の回路を2つ用意する。それぞれの回路の同じ位置にあるニューロンに同じ番号を付して1と1'のように対応づけをする。
- 非対角要素は、上述の対応するニューロン間の接続行列を表している。 $W^{(i_1, \dots, i_k)}$ をそのまま使う場合と、符号を反転して使う場合がある。
- このようにして構成された回路は、はじめに用意した2つの  $2^k$ 次元の回路の互換に対して不変である。このことから基本接続行列から構成された回路は、 $G_{2^{k+1}}$ 対称を持つこととなる。
- 基本接続行列の線形結合によってできる接続行列から構成した回路は、基本接続行列と同じ対称性を持つ。

### 3 構成した神経回路網の性質

#### 3.1 神経回路網の対称性

$N = 2^n$ 個のカオス・ニューロンを用いた自己想起形離散時間モデル (7) あるいは (9) を考える。すなわち

$$\eta(t+1) = k_f \eta(t) + W f(\eta(t)) \quad (46)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \eta(t+1) &= k_f \eta(t) + W f(\eta(t) + \zeta(t)) \\ \zeta(t+1) &= k_r \zeta(t) - \alpha f(\eta(t) + \zeta(t)) + a \end{aligned} \quad (47)$$

を考える。どちらの方程式も同じ接続行列  $W$  を持っているので、結合の性質は同じである。これらは、式 (10) で定義した状態の互換の  $n$  個の直積群に関して対称な性質を持っている。

そこでまず、 $C_2$  の  $n$  個の直積群を

$$G = \{g_1, g_2\} \overbrace{\otimes \cdots \otimes}^n \{g_1, g_2\} = \bigotimes^n \{g_1, g_2\} \quad (48)$$

とする。 $G$  の各要素は行列 (11) を  $n$  回 Kronecker 積することによって求められる。

このとき、次の性質がある。

【命題 1】

$$gW = Wg, \quad \forall g \in G \quad (49)$$

【証明】 $G$  は可換群であり、したがって  $\forall g \in G$  と  $W$  は、式 (17) で定義した行列  $P_N$  によって同時に対角化できる。このことから式 (49) を得る。なお、この具体的な計算は次の小節で行う。

したがって、式 (46), (47) で定義された系は群  $G$  に対して同変 (equivariant) となり、この群の各要素で状態を変換する操作に関して対称性を持つ。

### 3.2 神経回路網の座標変換

式 (46), (47) で定義された系が群  $G$  に対して対称性を持ち、 $G$  が可換群であることから、状態空間  $R^N$  は  $G$  に関する 1 次元既約部分空間に分解できる。この分解によって、式 (46), (47) は、 $N - m$  個の独立な 1 次元線形系と、 $m$  個の 1 次元非線形系に変換できる。ここに  $m$  は埋め込んだ記憶パターン・ベクトルの個数である。次に、このことを具体的に計算しよう。式 (46) について考えよう。式 (47) についても同様である。

まず、状態  $\eta$  を式 (17) で定義した行列  $P_N$  によって座標変換する。すなわち、変換

$$u = P_N \eta, \quad \eta = P_N u \quad (50)$$

を考える。この変換によって、式 (46) は次式となる。

$$u(t+1) = k_f u(t) + W_u h(u(t)) \quad (51)$$

ここに

$$W_u = P_N W P_N^{-1}, \quad h(u(t)) = P_N f(P_N u(t)) \quad (52)$$

とおいた。この方程式は、系のダイナミクスを  $N$  個の基本パターンを基底ベクトルに取り直して表した方程式である。

そこで、行列  $P_N W P_N^{-1}$  を計算しよう。直接計算して次の結果を得る。

【命題 2】

$$W_u = P_N W P_N^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_N \end{bmatrix} \quad (53)$$

ここに、右辺は対角行列であり、対角要素以外はすべて零を表す。また、対角要素は次の  $m$  個を残して他は零となる。

$$d_\ell = \begin{cases} 1, & \ell \in \{k_1, \dots, k_m\} \\ 0, & \ell \notin \{k_1, \dots, k_m\} \end{cases} \quad \ell = 1, \dots, N \quad (54)$$

このことから、最初に述べた性質が導かれる。すなわち、

【命題 3】  $N = 2^n$  個のカオス・ニューロンを用いた神経回路網 (46) を考えよう。この系は、 $m$  個のパターンを埋め込んだ行列  $W$  で結合しているものと仮定する。このとき、回路の運動 (46) は座標変換 (50) によって、埋め込んだパターン軸上の運動

$$u_{k_\ell}(t+1) = k_f u_{k_\ell}(t) + h_{k_\ell}(u(t)), \quad \ell = 1, \dots, m \quad (55)$$

と、他のパターン軸上の運動

$$u_k(t+1) = k_f u_k(t) \quad (56)$$

に分解される.

【2個のパタンを埋め込んだ  $N=4$  の例】

2.4 節で例示した  $N=4$  で, パタン  $p^2$  と  $p^3$  を埋め込んだ場合の運動を取りあげよう. 変換行列  $P_N$  と接続行列  $W$  は次式となる.

$$P_N = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

したがって

$$P_N W P_N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

これより, 系の運動方程式 (51) は次式となる.

$$\begin{aligned} u_1(t+1) &= k_f u_1(t) \\ u_4(t+1) &= k_f u_4(t) \\ u_2(t+1) &= k_f u_2(t) + h_2(u(t)) \\ u_3(t+1) &= k_f u_3(t) + h_3(u(t)) \end{aligned} \quad (59)$$

ここに

$$\begin{aligned} h_2(u) &= \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)\right) - f\left(\frac{1}{2}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)\right) \right. \\ &\quad \left. + f\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4)\right) - f\left(\frac{1}{2}(u_1 - u_2 - u_3 + u_4)\right) \right\} \\ h_3(u) &= \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)\right) + f\left(\frac{1}{2}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)\right) \right. \\ &\quad \left. - f\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4)\right) - f\left(\frac{1}{2}(u_1 - u_2 - u_3 + u_4)\right) \right\} \end{aligned} \quad (60)$$

とおいた.

### 3.3 既約部分空間での運動

前節の命題 3 より, 系のパラメータ  $k_f$  が

$$|k_f| < 1 \quad (61)$$

と選ばれている場合には, 式 (56) にしたがって, パタンの埋め込まれていない座標の運動は零となる. このことを仮定すると, パタンの埋め込まれた座標からなる部分空間の運動が, これまで議論してきた神経回路網の運動にとって本質的となる. 言い換えると, この神経回路網では埋め込んだパタンの個数に等しい低次元系の挙動を知ることによって回路網全体の運動を把握できる.

【命題 4】パタン軸上の低次元系は, 次の方程式で表される.

$$W_u u(t+1) = k_f W_u u(t) + W_u h(W_u u(t)) \quad (62)$$

【証明】命題 2, 3 から直接計算するとよい.

既約部分空間内の運動を元の神経回路網の運動に変換するには, パタンの埋め込まれていない座標に零を, パタンの埋め込まれた座標に命題 4 の座標を, それぞれの成分とするベクトル  $u$  を作り, このベクトルを式 (50) にしたがって状態  $\eta$  に変換すればよい.

たとえば, 前節の  $N = 4$  の例の場合, 元の回路に変換すると次式となる.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix} = P_4 \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 + u_3 \\ -u_2 + u_3 \\ u_2 - u_3 \\ -u_2 - u_3 \end{bmatrix} \quad (63)$$

### 3.4 2 個のパタンを埋め込んだ合原回路の例

本節では, これまでに例として挙げてきた,  $N = 4$  の合原モデルに 2 つのパタン  $p^2$  と  $p^3$  を埋め込んだ系を対象とし, 適当なパラメータ設定においてカオス遍歴現象がみられることや, その発生メカニズムには周期的カオスアトラクタ集合の boundary crisis がかわっていることなどを分岐現象の立場で明らかにする.

尚, ここでの「カオス遍歴現象」とは, カオス的に運動する解が状態空間のなかの複数個の部分空間をしばらく滞在しながら巡回する現象 [8, 9] であると定義する. このような曖昧な定義をしているのは現象の発生メカニズムがこれまでにほとんど解明されていないことによるもので, 今後, 解析がすすむにつれ, 応用への意義とも絡めて厳密な定義をおこなう必要があると考えている.

さて, 式 (57) の接続行列  $W$  より, 変数の組  $(\eta_1, \eta_4)$  と  $(\eta_2, \eta_3)$  の運動は互いに独立であり, それぞれ等価なダイナミクスで記述されることが容易にわかる. また, 前節の考察より, パタンの埋め込まれていない座標  $\eta_1 + \eta_4$  および  $\eta_2 + \eta_3$  の運動は零となることから, 結局, 系の本質的な運動は, 次式で記述される写像を解析すればよい.

$$T : R^3 \rightarrow R^3 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k_r x - \alpha f(x + z) + a \\ k_r y - \alpha f(y - z) + a \\ k_f z + \frac{1}{2}(f(x + z) - f(y - z)) \end{pmatrix} \quad (64)$$

ただし,  $x = \zeta_1$  (または,  $\zeta_2$ ),  $y = \zeta_4$  (または,  $\zeta_3$ ),  $z = \eta_1$  (または,  $\eta_2$ ) である.

解析結果を示す前に, 以降で使用する用語と記号を簡単に説明しておく. まず, 周期点を表す記号として  ${}_k D_l^m$  または  ${}_k I_l^m$  を用いる. ここに, 周期点の特性乗数が  $(-\infty, -1)$  に存在する個数が偶数のとき記号  $D$  を, 奇数のとき  $I$  とする. また,  $k$  は不安定次元の個数,  $m$  は周期の次数を表す. 下付きの添字  $l$  は単に同じ性質の周期点を区別するための数字である. 固定点または周期点に生じた周期倍分岐 (特性乗数の一つが  $-1$  となる) に対し, 分岐図中では記号  $I_l^m$  を用いる. ただし,  $m$  は周期の次数を,  $l$  は同じ種類の別集合を示す必要がある際の数字である. 尚, 周期点の分岐集合の計算には文献 [10, 11] の方法を用いた.

次に, 式 (64) の構造に関する定義を述べる. すなわち,

$$P : R^3 \rightarrow R^3 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (65)$$

としたとき,  $T$  と  $P$  は可換である. 変換  $P$  に関する不変部分空間は  $x = y, z = 0$  を満たす直線となり, 記号  $L$  で表す.

最後にカオス集合についての定義を挙げておく. アトラクタ集合  $A$  が  $m$  個の非連結な集合  $A_i$  により  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$  で表わされ, 各  $A_i$  が写像  $T^m$  のアトラクタ集合であるとき, 集合  $A$  は周期  $m$  で周期的であるという [12].

いま, 式 (64) において,  $k_f$  と  $k_r$  を除くパラメータは  $\alpha = 4, a = 0.8, \varepsilon = 0.015$  に固定する. このとき, カオス遍歴が生じるシナリオは次のようになる.

### 【周期点から同相カオスへ】

図 1 は, 直線  $L$  上の周期点に注目した分岐図である. 図中の周期倍分岐集合  $I_1^m$  ( $m = 2^k, k = 2, 3, 4, 5$ ) はパラメータ  $k_f$  軸に平行な直線であり, このときの  $DT$  の固有値  $-1$  に関する固有ベクトルは直線  $L$  の方向にある. すなわち, 発生した倍周期の周期点も直線  $L$  上に存在する. 無結合系でもみられる分岐であるということもできる. 一方,  $I_2^m$  で示した曲線をパラメータが通過すると対称性を破壊する方向に周期倍分岐が生じる. パラメータ  $k_r$  を増加させたとき, 安定な 2 のべき乗周期点は 2 度の周期倍分岐を通過する. これにより発生した  ${}_2D^m$  ( $m = 4, 8, 16, 32$ ) 型周期点が存在するパラメータ領域を図中, それぞれ,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$ , および  $\square$  で示した. ここで,  $L$  上の周期点  ${}_2D^m$  の特性乗数において, その値が  $-1$  未満の実数となるものが 2 つあるが, そのうち,  $(\pm q, \mp q, r)$  ( $q, r$  はある実数) を満たす固有ベクトル方向の  $\alpha$ -枝を  $\chi^+({}_2D^m)$  と書くことにする.

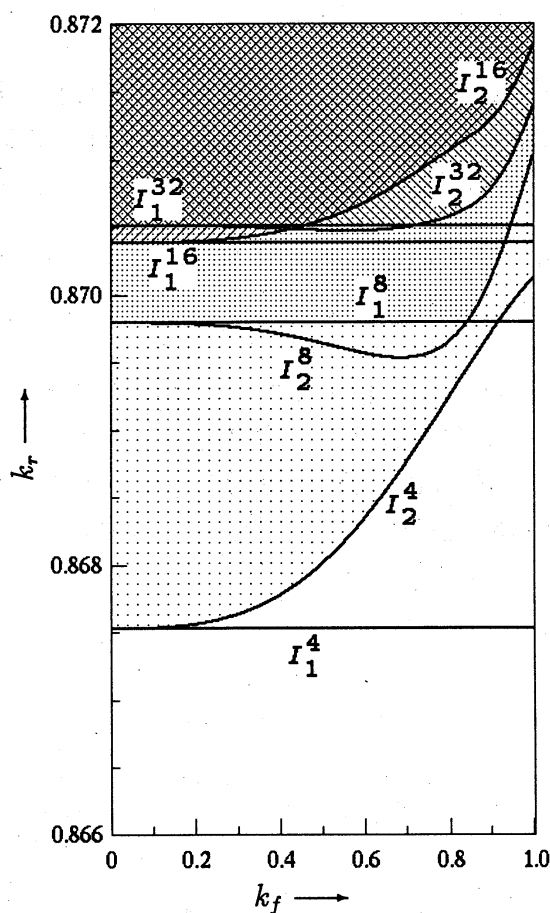


図 1: 式 (64) にみられる周期点の分岐図.

パラメータ  $k_r$  を増加させたとき, 周期倍分岐の連鎖によりカオスが生じる. 図 2 (a) は, 状態を直線  $L$  に制限した運動の最大リアプノフ指数である. 図中の点  $a$  は倍周期連鎖によるカオス発生パラメータを示す. 一方, 図 2 (b) は, ある非対称な初期値から出発した軌道のリアプノフ指数を示す. いま, カオス発生直後のパラメータ (すなわち, 図 2 (b) 中の点  $a$  が示すパラメータ値よりわずかに大きな値. たとえば,  $k_r = 0.8706$ ) に固定し, 状態の初期値を直線  $L$  の近傍に与えたとき, 直線  $L$  の近傍を彷徨するカオス状態 (ほぼ同相のカオス) がみられる (直線  $L$  上に制限されたカオスは数値計算の誤差等により観察

できない). ほぼ同相カオスが発生するメカニズムは周期点の  $\alpha$ -枝, すなわち,  $\chi^+({}_2D^m)$ , の性質で説明することができる.

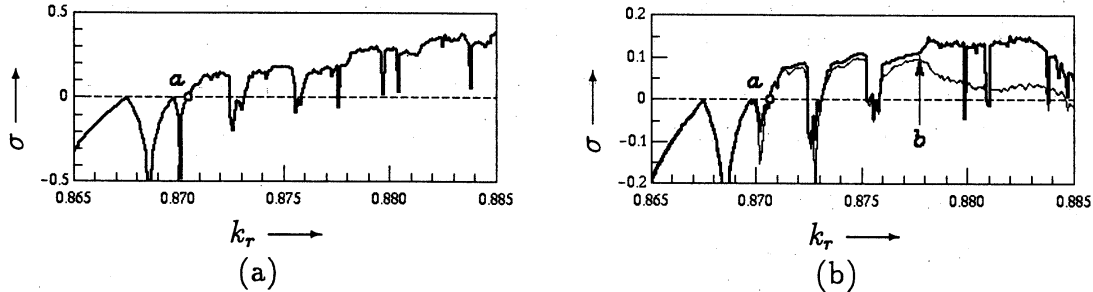


図 2: 式 (64), ただし,  $k_f = 0.3$ , にみられる軌道のリアプノフ指数  $\sigma$ . (a) においては軌道を直線  $L$  に制限してある. また, (b) において, 太線と細線はそれぞれ, 第 1, 第 2 リアプノフ指数を表わす.

同相カオスの発生直前でみられるカオスの例を図 3 (a) に挙げた.  $T^{32}$ -不変な周期的アトラクタ集合  $A_i$  ( $i = 0, \dots, 31$ ) がみられる. このアトラクタは  ${}_2D^{16}$  の  $\alpha$ -枝の周辺で解が振る舞うことによって生じる. 非連結なアトラクタ集合  $A_i$  は次の性質を持つ:  $P(A_i) = A_j$  ( $j = (i + 16) \bmod 32, i = 0, \dots, 15$ ). すなわち,  $A_i$  と  $P(A_i)$  の組は  $T^{16}$ -不変である.

ここで, 同相カオスが発生するようにパラメータを増加させたとき,  $A_i \cap P(A_i) \neq \emptyset$  となり, 相図は図 3 (b) のようになる. 新しくできたアトラクタ集合は 16 周期となる. この現象は  $\chi^+({}_2D^{16})$  と  $P(\chi^+({}_2D^{16}))$  の交差にともなって生じたものである.

図 4 において記号  $H^m$  で示した曲線の内部領域 (影を付したパラメータ領域) では,

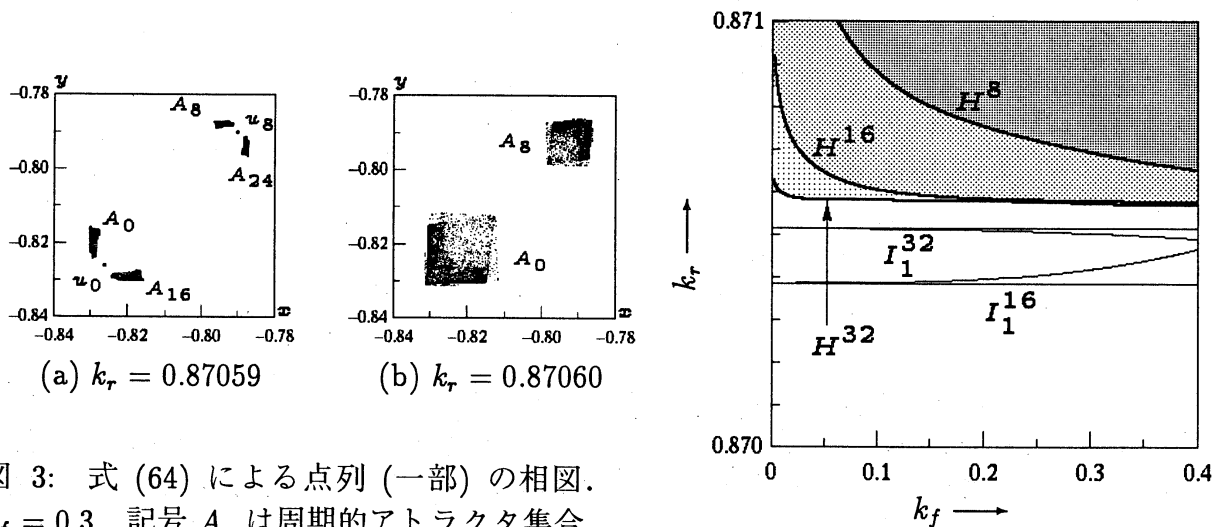


図 3: 式 (64) による点列 (一部) の相図.  $k_f = 0.3$ . 記号  $A_*$  は周期的アトラクタ集合,  $u_*$  は周期点を表わす ( $u_8 = T^8(u_0)$ ).

図 4: 式 (64) にみられる周期点の  $\alpha$ -枝が交差するパラメータ領域.



$\chi^+({}_2D^m) \cap P(\chi^+({}_2D^m)) \neq \phi$  が成り立ち,  $m$  周期同相カオス・アトラクタ集合がみられる. パラメータ集合の計算には文献 [13, 14] の方法を応用した. 各領域の大域的な位置関係より, 次が予想できる: パラメータ  $k_r$  を増加させたとき,  $H^{2^k}(k \rightarrow \infty)$  で同相カオスが発生し,  $k$  の減少と共に周期的アトラクタ集合の周期が減少する. このとき,  $H^{2^k}(k \rightarrow \infty)$  が生じるとみられるパラメータ (図 2 (b) の点 a) と倍周期連鎖の集積点 (図 2 (a) の点 a) とは同じ値であることも予想され, 興味深い.

#### 【同相カオスの崩壊によるカオスの遍歴現象の発生】

以下, 周期的同相カオス・アトラクタ集合が崩壊する過程について考察する. 図 5 は, 図 2 (b) 中の点 b が示すパラメータ値の前後における相図である. パラメータ  $k_r$  をほんのわずかに増加させることにより, 図 5 (a) でみられた 4 周期アトラクタ集合  $A_1, \dots, A_4$  が同図 (b) のように互いに連結し, 同相状態を崩すような空間を点列が彷徨する様子が観察できる. このカオス・アトラクタは, 4 周期点の  $\alpha$ -枝の近傍を運動しており,

$$\chi^+({}_2D^4) \cap \chi^+(T^n({}_2D^4)) \neq \phi, \quad n = 1, 2, 3 \quad (66)$$

の発生と同時に boundary crisis が生じ, 同相カオスが崩壊する.

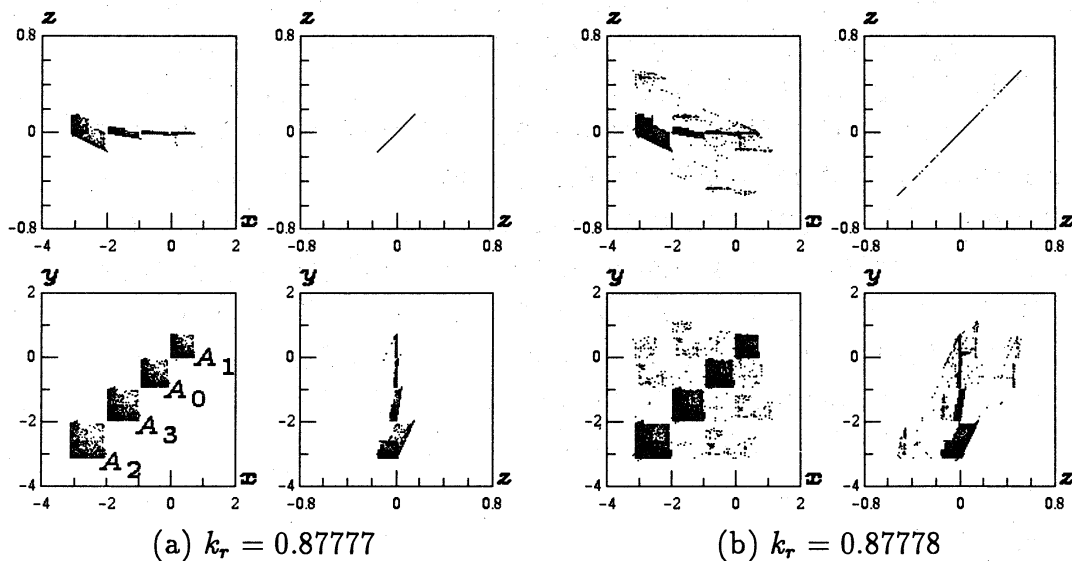


図 5: 式 (64), ただし,  $k_f = 0.3$ , にみられる同相カオスの崩壊前後の相図.

図 6 に  $T^4$  毎の点列を示す. 同図 (a) より, 4 つの準安定状態が存在し, ある準安定状態でしばらく滞在した後, 別の状態へ切り替わる様子がわかる. 同図 (b) は, 時間が  $[720, 1300]$  における相図である. 別の準安定状態へ切り替わる際に, 点列は一つの準安定状態の外にある状態に短期間滞在する. いま,  $u$  を 4 周期点としたとき,  $T(\chi^+(u)) \subset \chi^+(T(u))$  であるので, 任意の点  $p \in \chi^+(T^n(u))$  に対し,  $T(p) \in \chi^+(T^{n+1}(u))$  が成り立つ ( $n = 0, 1, \dots$ ). そこで, 点  $p_1 \in \chi^+(u) \cap \chi^+(T(u))$  が存在するならば,  $T(p_1) \in \chi^+(T(u)) \cap \chi^+(T^2(u))$  と

なる。したがって、 $\alpha$ -枝の交差が1つでも存在すると、交点が周期点でない限り交差は無限個存在することになる。すなわち、準安定状態を遍歴する現象は停止することがない。

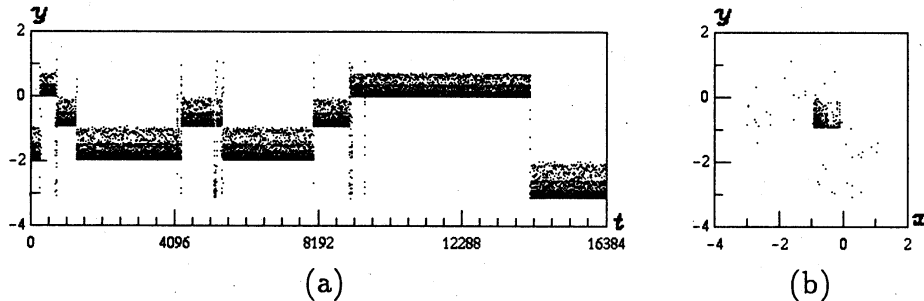


図 6:  $T^4$  による点列の (a) 時系列, および (b) 相図 ( $720 < t < 1300$ ). 式 (64) のパラメータは  $k_f = 0.3$ ,  $k_r = 0.87778$ .

#### 【記憶パタンの遍歴】

さて, boundary crisis による準安定状態の切り替わりとネットワークにおける記憶パターン想起の関係についてみてみよう.

図 5 より, 準安定状態が切り替わるときの点列は大きな  $|z|$  の値を持つことがわかる ( $z = \eta_1$  または  $\eta_2$ ). このとき,  $\eta_1$  と  $\eta_2$  の運動は互いに独立かつカオス的であるので, 準安定状態が同時に切り替わる状況が生じ得る. 一方, 式 (63) より,  $u_2 = \eta_1 - \eta_2$ ,  $u_3 = \eta_1 + \eta_2$  であるから,  $(\eta_1, \eta_2)$  平面に写影した点列が逆相および同相となると, それぞれ, パタン  $p^2$ ,  $p^3$  の埋め込まれた座標成分が増大することを意味する. すなわち, 式 (64) において周期的同相カオス集合の崩壊, すなわち, boundary crisis が生じるとき, ネットワークの出力が記憶パターンを想起する現象が開始するといえる. 同相カオスの崩壊直後のパラメータにおいては記憶パターンを想起する期間は非常に短い, パラメータ  $k_r$  をより大きな値に設定すると, 各埋め込みパターンをしばらく滞在するような遍歴がみられる.

尚, 式 (38) のように埋め込みパターン間に重み付けを施すことにより, 状態  $\eta_1$  と  $\eta_2$  が弱く結合した系について解析をおこなった結果は文献 [6] にある.

## 4 むすび

カオス・ニューラル・ネットワークに埋め込んだパタンの対称性を利用して, 系の運動を低次元化するための系統的な方法を述べた. また, 2つの直交パターンを埋め込んだ4個結合系にみられるカオス遍歴の発生シナリオを分岐現象の立場で明らかにし, 準安定状態の切り替わりが埋め込みパターン軸上の成分を増大させ, 記憶パタンの想起を引き起こすメカニズムを例証した.

非直交パターンを埋め込んだネットワークは応用面から重要である. 直交パタンの座標成分の合成によって運動を説明できるかどうか実際に検証することが必要である.

また, 4周期カオス・アトラクタ集合の崩壊と同時に, 4周期点の  $\alpha$ -枝が状態空間の広

い範囲に急激に伸びる現象が観察されているが、この興味深い現象の発生メカニズムを解明するため、他の周期点に関する多様体を調べることも今後の課題である。

## 参考文献

- [1] K. Aihara. "Chaotic neural networks". In H. Kawakami, editor, *Bifurcation Phenomena in Nonlinear Systems and Theory of Dynamical Systems*, pages 143–161. World Scientific, Singapore, 1989.
- [2] K. Aihara, T. Takabe, and M. Toyoda. "Chaotic neural networks". *Physics Letters*, A(144):333–340, 1990.
- [3] M. Adachi, K. Aihara, and A. Cichocki. "Separation of mixed patterns by a chaotic neural network". *Proc. of the NOLTA '96*, pages 93–96, 1996.
- [4] 宮崎 淳, 城木 芳隆, 徳田 功, 長島 知正. "カオスニューラルネットにおける同期に基づく動的連想記憶の生成のシナリオ". *NOLTA Workshop'96 論文集*, 2:11–15, 1996.
- [5] 吉永 哲哉, 井沼 康祐, 川上 博. "あるカオス・ニューラル・ネットワークにみられるカオスの遍歴現象の解析". 電子情報通信学会技術報告, **NLP97-102**:25–32, 1997.
- [6] 吉永 哲哉, 井沼 康祐, 川上 博. "あるカオス・ニューラル・ネットワークにみられるカオスの遍歴現象の解析 (II)". 電子情報通信学会技術報告, **NLP97-164**:23–30, 1998.
- [7] 小室 元政. "大域結合写像とカオスニューラルネットワークにおけるカオスの遍歴のメカニズムについて". In 京都大学数理解析研究所研究集会「力学系の不変量とその応用」, 1998.
- [8] K. Nakano. "Association — a model of associative memory". *IEEE Trans.*, **SMC**(2):381–388, 1972.
- [9] T. Kohonen. "Correlation matrix memories". *IEEE Trans.*, **C**(22):353–359, 1972.
- [10] H. Kawakami. "Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters". *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-31**(3):246–260, 1984.
- [11] H. Kawakami and T. Yoshinaga. Codimension two bifurcation and its computational algorithm. In J. Awrejcewicz, editor, *Bifurcation and Chaos: Theory and Applications*, pages 97–132. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [12] C. Mira, D. Fournier-Prunaret, L. Gardini, H. Kawakami, and J.C. Cathala. "Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps: Fractalization of basins". *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(2):343–381, 1994.
- [13] T. Yoshinaga, H. Kitajima, H. Kawakami, and C. Mira. "A method to calculate homoclinic points of a two-dimensional noninvertible map". *Trans. IEICE*, **E80-A**(9):1560–1566, Sep. 1997.
- [14] 吉永 哲哉, 北島 博之, 川上 博, C. Mira. "ある 2 次元非可逆写像にみられるホモクリニック点の計算方法". 電子情報通信学会技術報告, **NLP96-33**:165–172, 1996.